Μαθημα 2º

Κλασσικη

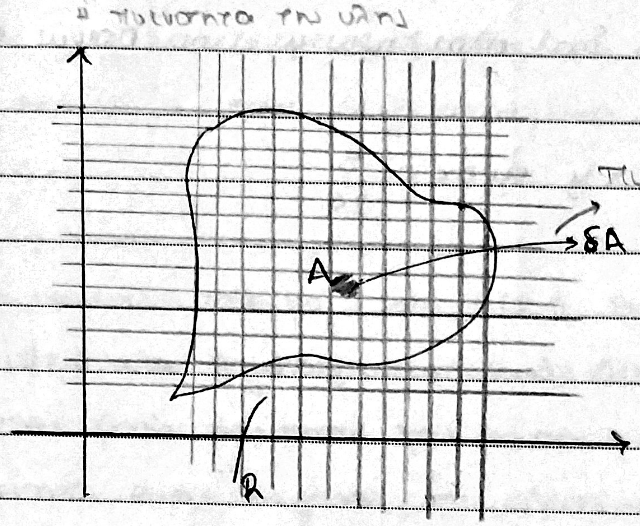
Πυκνοτητα και μαζα

Θεωρουμε ενα λεπτο επιπεδο στρωμα υλικου εμβαδου A. Ο τροπος που κατανεμεται η μαζα του ονομαζεται πυκνοτητα και σχετιζει το μεγεθος και την μαζα

$\rho = \sigma\tau\alpha\theta$ αρα

$\rho = \dfrac{\delta m}{\delta A}$ ή

$m = \iint \rho \, dA$



πυκνοτητα = σταθ.

μαζα δm και

$\delta\rho = \dfrac{\delta m}{\delta A}$

Στη περιπτωση που η πυκνοτητα ειναι σταθερη οριζουμε την πυκνοτητα ως εξης:

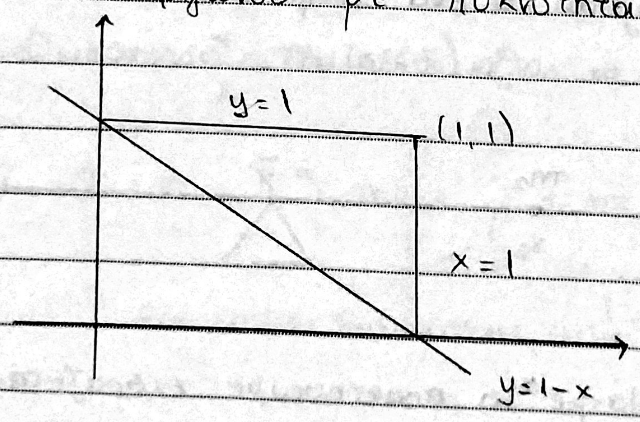
$\rho = \dfrac{m}{A}$ ή $\rho = \dfrac{m}{V}$

πρωτα το x

σαρωνω αριστ-δεξια

παραδειγμα

Να βρεθει η μαζα του τριγωνου με πυκνοτητα $\rho = x \cdot y$



απαντηση

Περιμενω τα δυο ολοκληρωματα να ειναι ισα εφοσον υπαρχει απολυτη συμμετρια επομενως του ότι δεν εχει σημασια η αλλαγη μεταβλητων

Εχουμε $m = \iint_R \rho \, dA = \int_0^1 \int_{1-y}^1 x \cdot y \, dx\,dy = \int_0^1 y \frac{x^2}{2}\Big|_{1-y}^{1} dy =$

$= \int_0^1 y \left[\frac{1}{2} - \frac{(1-y)^2}{2} \right] dy = \frac{5}{24}$ ολοκληρωνω απο αριστερα προς τα δεξια

και για $dy\,dx$ δηλ ολοκληρωνω απο κατω προς τα πανω

$m = \iint_R \rho \, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 x\,y \, dy\,dx = \frac{5}{24}$

Τα δυο ολοκληρωματα ειναι ισα γιατι ειναι συμμετρικά

Παρατηρηση

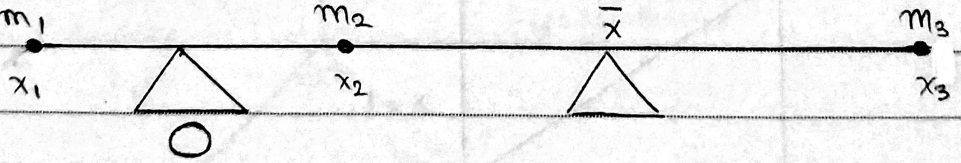
Αντιστοιχα προβληματα στη φυσικη που αντιστοιχουν σε κατανομες υπολογιζονται με τον ιδιο τροπο οπως πχ κατανομή φορτιου στον ηλεκτρομαγνητισμο

Κεντρο μαζας

δε μπορω να τον παραμορφωσω

Θεωρουμε τρεις μαζες m_1, m_2, m_3 που προσδενονται σε εναν ακαμπτο αξονα. Ο αξονας στηριζεται σε ενα υπομοχλιο οπως το σχημα

Δε παιζει ρολο μονο η μαζα αλλα και η αποσταση απο το υπομοχλιο



Το προβλημα που θελουμε να απαντησουμε εκφραζεται με δυο μορφες

1) Γνωριζονται τις μαζες m_1, m_2, m_3 και τις θεσεις τους x_1, x_2, x_3 ζητω το σημειο Ο ωστε ο αξονας να ισορροπει

2) Γνωρίζοντας τις μάζες m_1, m_2, m_3 και το σημείο O ζητώ τις θέσεις x_1, x_2, x_3 ώστε ο άξονας να ισορροπεί

! Το σημείο O καλείται κέντρο μάζας του συστήματος

Παρατήρηση

Πολλά συστήματα και δομές συμπεριφέρονται σαν υλικά σημεία, θεωρώντας όλη την μάζα τους συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας τους.

Στο σύστημα με το υπομόχλιο κάθε μάζα m_i, $i=1,2,3$ θέλει να στρέψει τον άξονα όπως μια τραμπάλα λόγω της αντίστοιχης δύναμης $m_i g$. Η επίδραση αυτή καλείται ροπή βαρύτητας και ισούται με $M_i = m_i g x_i$. Η συνολική ροπή βαρύτητας είναι εν γένει το άθροισμα των επιμέρους ροπών δηλ. $M = \sum_i m_i g x_i = g \sum_i m_i x_i$. για το σχήμα μας $M = g(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$

Οι θέσεις x_i λαμβάνονται ως συντεταγμένες με το πρόσημο τους. Εάν το σημείο ισορροπίας δεν είναι το O αλλά το $\bar{x}$ τότε ως προς το $\bar{x}$ έχω $M_i = m_i g (x_i - \bar{x})$ δηλ η συνολική ροπή θα είναι $M = \sum_i g m_i (x_i - \bar{x})$. Αφού το $\bar{x}$ είναι το κέντρο μάζας τότε $M=0$

Ώστε

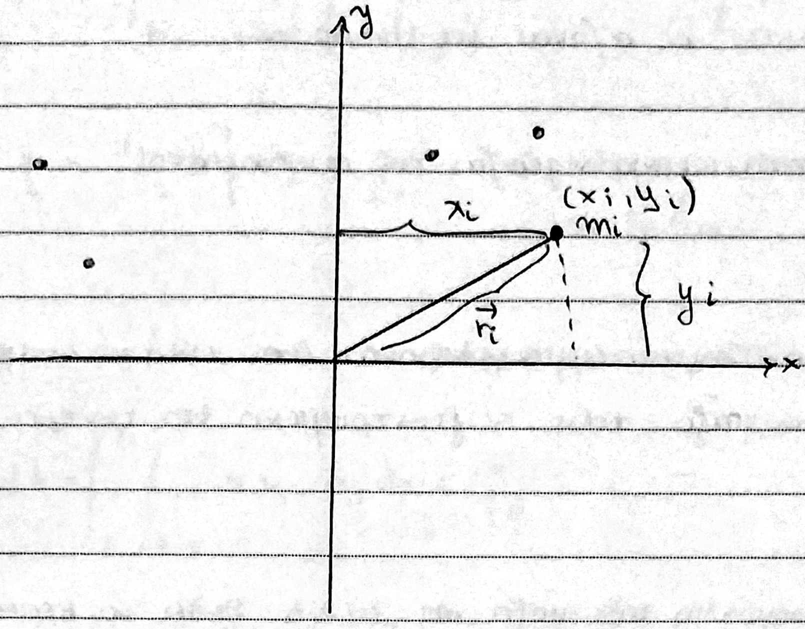
$$\sum_i \cancel{g}\, m_i (x_i - \bar{x}) = 0 \Rightarrow \sum_i m_i (x_i - \bar{x}) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_i m_i x_i - \sum_i m_i \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} \sum_i m_i = \sum_i x_i m_i \Rightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

έχει ωστές διαστατικές μονάδες.

Μαζες κατανεμημενες στο επιπεδο



Θεωρουμε ενα συστημα μαζων στο επιπεδο οπου καθε μαζα m_i βρισκεται στη θεση $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j}$

Η συνολικη μαζα του συστηματος ειναι $m = \sum_i m_i$ και καθε μαζα εχει ροπή ως προς τους δυο αξονες

αποσταση σημειου απο αξονα

$\bar{x} = \frac{M_y}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$ οπου $M_x = \sum_i m_i y_i$, $M_y = \sum_i m_i x_i$

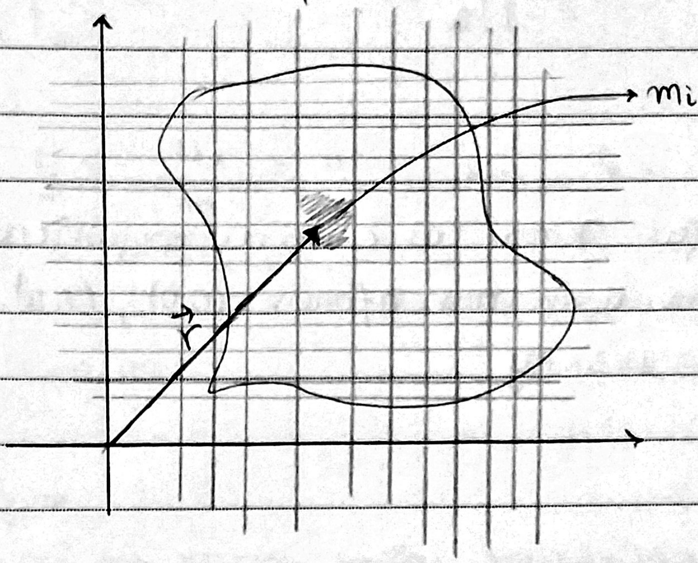
ο τροπος με τον οποιο θελω να στρεψω το σημειο

Οπως και πριν οι συντεταγμενες x_i, y_i ειναι με το προσημο τους

Το κεντρο μαζας $(\bar{x}, \bar{y})$

Λεπτα και επιπεδα στρωματα με συνεχη κατανομη μαζας

Βασιζομενοι στη παραπανω ιδεα μπορουμε να υπολογισουμε το κεντρο μαζας ενος λεπτου επιπεδου στρωματος (υμενιο) π.χ λεπτος δισκος αλουμινιου



Εχω να αθροισω ροπες πολλων σημειων

Καθε κομματι της διαμερισης εχει σταθερη μαζα, δηλ η ροπη ως προς τους αξονες του στοιχειωδους κομματιου ειναι $M_{ij\,x} = m_{ij}\, y_{ij}$

Η στοιχειωδης μαζα θα ειναι $m_i = \rho(x_{ij}, y_{ij})\, \delta A_{ij}$

Επιπλεον $M_{ij\,y} = m_{ij}\, x_{ij} = \rho(x_{ij}, y_{ij})\, \delta A_{ij}\, x_{ij}$

Δηλαδη η συνολική ροπή (ζευγος ροπων) θα ειναι

$$M_x = \iint_R \rho y \, dA \quad , \quad M_y = \iint \rho x \, dA \quad \text{και}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} \quad , \quad m = \iint_R \rho \, dA$$

Στη περιπτωση που $\rho = \Sigma\tau\alpha\theta$ τοτε το κεντρο μαζας ονομαζεται κεντροειδες και δεν εξαρταται απο την τιμη της πυκνοτητας

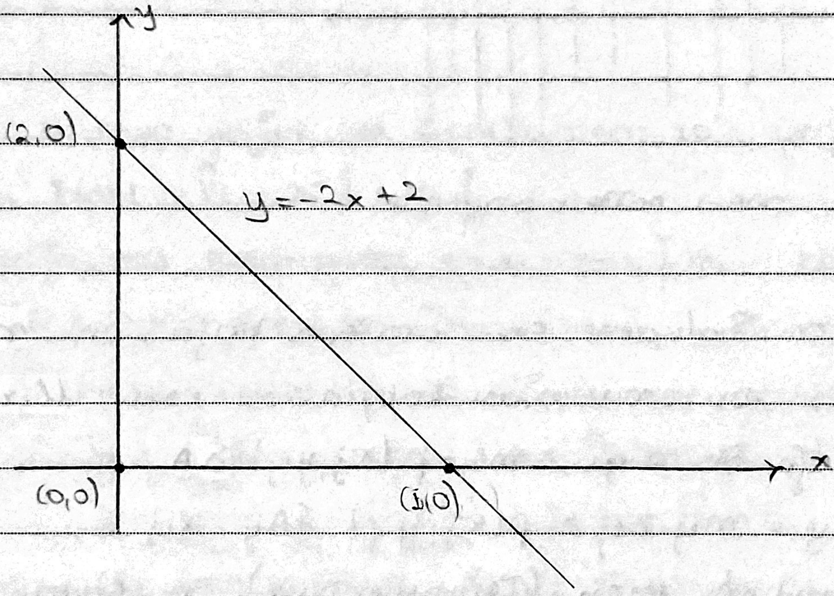
Δηλαδη

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\, dA}{\iint_R dA}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y\, dA}{\iint_R dA}$$

Παραδειγμα

Να βρεθει το κεντρο μαζας λεπτου και επιπεδου τριγωνικου στρωματος με κορυφες την αρχη των αξονων (0,0), (1,0) και (0,2) και πυκνοτητα $\rho = 1+3x+y$

απαντηση



Αρα εχω $y=ax+b$ τη μορφη της ευθειας

θα λυσω το συστημα $y=ax+b$ $\;\Big|\;$ $b=2$, $a=-b=-2$

οποτε η ευθεια ειναι $y=-2x+2$

$$m = \iint \rho\, dA = \int_0^1 \int_0^{-2x+2} (1+3x+y)\, dy\, dx = \frac{8}{3}$$

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{-2x+2} x(1+3x+y)\, dy\, dx = 1$$

$$M_x = \int_0^1 \int_0^{-2x+2} y(1+3x+y)\, dy\, dx = \frac{11}{3}$$

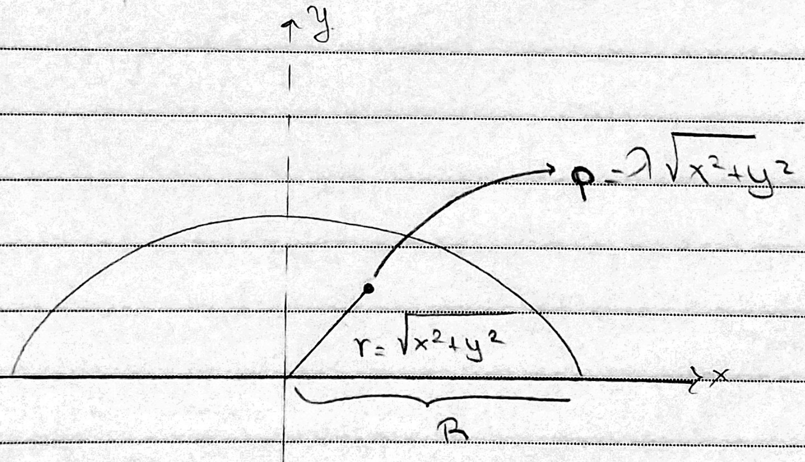
Αρα $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{11}{8}$ και $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{3}{8}$

αν εβγαζα $\bar{x} = 11/8$ τοτε το κεντρο μαζας θα ηταν εκτος του τριγωνου και θα ειχα ατοπο

Παραδειγμα

Να βρεθει το κεντρο μαζας ημικυκλικου στρωματος με πυκνοτητα αναλογη της αποστασης απο το κεντρο επι.

απαντηση



θα κανω κυκλικα ολοκλ. /πολικες η με μεθοδους απο απειροστικο

$$M = \iint \rho\, dA = \int_{-R}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \lambda \sqrt{x^2+y^2}\, \underbrace{dy\, dx}_{r\,dr\,d\theta}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

σαρωνω όλο το τοξο (ακτινα)

$$M = \int_0^{\pi}\int_0^{R} \lambda \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} \cdot r \, dr \, d\theta =$$

$$= \lambda \int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \, dr \, d\theta = \lambda \int_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{R} d\theta =$$

$$= \lambda \int_0^{\pi} \frac{R^3}{3} \, d\theta = \lambda \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi} d\theta = \frac{R^3}{3} \cdot \lambda \pi = \lambda \pi \frac{R^3}{3}$$

Εχω γινομενο ολοκληρωματων (το διπλο ολοκληρωμα) οταν βρισκομαι σε τετραγωνα χωρια